3 Ciklične grupe in nekatere lastnosti podgrup

Definicija ($\langle a \rangle$)
Za vsak element a grupe G, definiramo $\langle a \rangle$ na naslednji način

$$\langle a \rangle = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Upoštevajte, da eksponent elementa a vključuje vsa negativna cela števila, kot tudi ničlo, in vsa pozitivna cela števila (po definiciji, je a^0 identiteta)

1. Naj bo G grupa, in naj bo a poljubni element grupe G. Pokažite, da je $\langle a \rangle$ podgrupa grupe G.

[$a^n a^m = a^{m+n}$, $a^0 = e$, $a^n a^{-n} = a^0$]

2. Množica $U(10) = \{k \in \mathbb{N} \mid k < 10,\ gcd(k, 10) = 1\}$ tvori grupo glede na operacijo množenja modulo 10. Določi $\langle 3 \rangle$.

[$U(10) = \{1, 3, 7, 9\}$, $3^0 = 1$, $3^2 = 9$, $3^3 = 7$, $3^4 = 1$, $3^5 = 3$,$3^{-1} = 7$,$3^{-2} = 9$, $3^{-3} = 3$]

3. Dana je grupa $(\mathbb{Z}_{10}, +)$. Določi $\langle 2 \rangle$. [$\mathbb{Z}_{10} = \{0, 1, 2, ..., 9\}$, $\langle 2 \rangle = \{0, 2, 4, 6, 8\}$]

4. Dana je grupa $(\mathbb{Z}, +)$. Določi $\langle -1 \rangle$. [$\langle -1 \rangle = \mathbb{Z}$]

Definicija (ciklična grupa)
Podgrupo $\langle a \rangle$ imenujemo ciklična podgrupa grupe G generirana z a. Če je $G = \langle a \rangle$ za rez $a \in G$, potem pravimo, da je G ciklična grupa in da je a generator grupe G. (Ciklična grupa lahko ima več generatorjev). Upoštevajte, da čeprav ima niz $..., a^{-2}, a^{-1}, a^0, a^1, a^2, ...$ neskončno mnogo elementov, je lahko množica $\{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ končna. Upoštevajte tudi da je zaradi $a^i a^j = a^{i+j} = a^{j+i} = a^j a^i$, vsaka ciklična grupa abelska.

5. Množica $G = \{I, A, B, AB, BA, ABA\}$ tvori grupo glede na operacijo množenja, in njena Cayleyeva tabela je dana na desni strani.
(a) Določi vse ciklične podgrupe grupe G. Za vsako podgrupo, napiši vse mogoče generatorje.
(b) Za vsak $g \in G$, izračunaj $|g|$. Obrazloži svojo trditev.

	I	A	B	AB	BA	ABA
I	I	A	B	AB	BA	ABA
A	A	I	AB	B	ABA	BA
B	B	BA	I	ABA	A	AB
AB	AB	ABA	A	BA	I	B
BA	BA	B	ABA	I	AB	A
ABA	ABA	AB	BA	A	B	I

[$\langle I \rangle = \{I\}$, $\langle A \rangle = \{I, A\}$, $\langle B \rangle = \{I, B\}$, $\langle AB \rangle = \langle BA \rangle = \{I, AB, BA\}$, $\langle ABA \rangle = \{I, ABA\}$]

6. Dana je grupa G, in dana sta dva elementa $a, b \in G$, ki imata naslednjo lastnost: $|a| = 4$ in $|b| = 2$. Če je $a^3 b = ba$, določi red elementa ab. [$a^2 b = ba \Rightarrow b = aba \Rightarrow (ab)^2 = e$]

7. Dana je grupa G, in dana sta dva elementa $a, b \in G$, ki imata naslednjo lastnost: $|a| = 4$ in $|b| = 2$. Razloži, zakaj enakost $a^2 b = ba$ ni mogoča.

[$a^2 b = ba \Rightarrow a^2 = bab \Rightarrow abab = a^3 \Rightarrow bab = e$, $abab = a^3 \Rightarrow bab = a^2$, $a^2 = e$]

8. Dana je grupa $(\mathbb{Q}, +)$. Pokaži, da ta grupa ni ciklična.

[$\mathbb{Q} = \langle \frac{a}{b} \rangle$, $\frac{a}{2b} \in \langle \frac{a}{b} \rangle$, $n\frac{a}{b} = \frac{a}{2b}$, $n = \frac{1}{2}$]

9. Naj bo G grupa, in naj bo H neprazna podmnožica možice G. Pokaži, da če je $ab^{-1} \in H$ za poljubna $a, b \in H$, potem je H podgrupa grupe G.

[$e = xx^{-1} = ab^{-1} \in H$, $ex^{-1} = ab^{-1}$, $xy = x(y^{-1})^{-1} = ab^{-1} \in H$]

10. Naj bo G grupa, in naj bo H neprazna podmnožica grupe G. Pokazati, da če je ab v H kadarkoli sta a in b v H (torej, če je H zaprta glede na operacijo množenja), in če je a^{-1} v H za poljuben $a \in H$ (torej, če je H zaprta za inverze), potem je H podgrupa grupe G.

[$a, b \in H$, $b^{-1} \in H$, $ab^{-1} \in H$]

Opomba. Iz naloge 10 vidimo, da je H podgrupa grupe G če je (i) $H \neq \emptyset$, (ii) H zaprta glede na operacijo množenja in (iii) $\forall a \in H$ imamo $a^{-1} \in H$ (da vsak a iz H ima inverz v H).

Zaradi naloge številka 9, vidimo da je H podgrupa grupe G če je (i) $H \neq \emptyset$ in (ii) $\forall a, b \in H$ $ab^{-1} \in H$.

11. Naj bo G abelska grupa. Pokaži, da je $H = \{x \in G \mid |x| \text{ je končno število}\}$ podgrupa grupe G.

[$|a| = m$, $|b| = n$, $(ab)^{mn} = (a^m)^n(b^n)^m = e^n e^m = e$, $(a^{-1})^m = (a^m)^{-1} = e^{-1} = e$]

12. Pokaži, da za vsak element a grupe G obstaja enolično določen element $b \in G$ tako da velja $ab = ba = e$.

[$ab = e = ac$, $b = c$]

13. Naj bo G grupa, in naj bosta $a, b \in G$. Pokaži, da je $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

[$(ab)(ab)^{-1} = e$, $(ab)(b^{-1}a^{-1}) = e$]

14. Naj bo G abelska grupa, in najbo sta H in K podgrupi grupe G. Pokaži, da je $HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$ podgrupa grupe G.

[$e = ee$, $a = h_1k_1$, $b = h_2k_2$, $ab = (h_1h_2)(k_1k_2)$, $a^{-1} = h_1^{-1}k_1^{-1}$]

15. Naj bo G grupa neničelnih realnih števil glede na operacijo množenja. Preveri, ali sta $H = \{x \in G \mid x = 1, \text{ ali } x \text{ je iracionalno število}\}$ in $K = \{x \in G \mid x \geq 1\}$ podgrupi grupe G.

[$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \notin H$, $2^{-1} \notin K$]

16. Naj bo H neprazna končna podmnožica grupe G. Pokaži, da če je H zaprta glede na operacijo množenja, tedaj je H podgrupa grupe G.

[$1^\circ a = e$ $2^\circ a \neq e$, $\{a, a^2, a^3, ...\}$, $a^i = a^j$, $a^{i-j} = e$, $i - j > 1$, $a^{i-j-1} = a^{-1}$, $i - j - 1 \geq 1$]

17. Za element $x \in G$ velja $x^2 = e$ natanko takrat, ko je $x = x^{-1}$. Uporavi to pri dokazu naslednje tvrditve: vsaka grupa sodega reda vsebuje liho število elementov reda 2.

[$S = \{x \in G \mid x^2 \neq e\}$, $|S| = 2m$, $G = \{e\} \cup S \cup \{x \in G \mid x^2 = 2\}$, disjunktna unija]

18. Naj bosta x in g elementa grupe G. Pokaži, da imata x in gxg^{-1} enak red. Zatem pokaži, da imata xy in yx enak red za poljubna dva elementa $x, y \in G$.

[$(gxg^{-1})^n = (gxg^{-1})(gxg^{-1})...(gxg^{-1}) = gx^ng^{-1} = e \Rightarrow |gxg^{-1}| \leq |x|$, $g' = g^{-1}$, $x' = gxg$, $|g'x'g'^{-1}| \leq |x'|$]